

**METODE NUMERIK  
APLIKASI UNTUK TEKNIK SIPIL**

**Prof. Dr. Ir. Bambang Yulistiyanto**

**GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS**

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xv
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Pengertian Metode Numerik.....	1
1.2 Matematika Dasar untuk Pemahaman Metode Numerik..	4
1.2.1 Akar persamaan .....	4
1.2.2 Sistem persamaan linear.....	5
1.2.3 Regresi dan interpolasi .....	6
1.2.4 Integral numerik .....	6
1.2.5 Persamaan diferensial biasa .....	7
1.2.6 Persamaan diferensial parsial.....	8
1.3 Kesalahan pada Metode Numerik.....	8
BAB 2 AKAR PERSAMAAN .....	11
2.1 Akar Persamaan Kuadrat.....	11
2.2 Permasalahan Akar Persamaan di Teknik Sipil.....	12
2.3 Metode Setengah Interval.....	21
2.4 Metode Interpolasi Linear .....	35
2.5 Metode Newton Raphson.....	40
2.5.1 Pembagi nol .....	44
2.5.2 Lompatan akar persamaan.....	46
2.6 Metode Secant.....	49
2.7 Metode Iterasi.....	55
BAB 3 SISTEM PERSAMAAN LINEAR .....	57
3.1 Persamaan Diferensial Dalam dunia Teknik Sipil .....	57
3.2 Deret Taylor .....	58
3.3 Diskretisasi Numerik.....	62
3.4 Resume Diskretisasi Numerik.....	67
3.5 Sistem Persamaan Linear dalam Teknik Sipil .....	68

3.5.1	Aplikasi Persamaan La Place.....	69
3.5.2	Aplikasi Persamaan Poisson.....	72
3.5.3	Aplikasi struktur rangka ( <i>Truss</i> ).....	75
3.6	Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linear .....	78
3.6.1	Metode Cramer.....	78
3.6.2	Metode Eliminasi Gauss.....	90
3.6.3	Metode Gauss-Jordan .....	103
3.6.4	Metode Dekomposisi LU .....	111
3.6.5	Metode Matriks Invers .....	115
3.6.6	Metode Iterasi Gauss-Seidel.....	120
3.6.7	Metode Iterasi Jacobi .....	124
3.6.8	Metode <i>Double Sweep</i> Choleski.....	127
BAB 4	INTERPOLASI.....	136
4.1	Penggunaan Interpolasi .....	136
4.2	Interpolasi dengan Metode Langsung.....	139
4.2.1	Interpolasi langsung orde satu.....	139
4.2.2	Interpolasi langsung orde dua .....	141
4.2.3	Interpolasi langsung orde tiga .....	144
4.2.4	Penggunaan VBA untuk Interpolasi Langsung.....	147
4.3	Interpolasi dengan Metode Newton.....	150
4.3.1	Metode Newton untuk interpolasi linear.....	153
4.3.2	Metode Newton untuk interpolasi kuadrat .....	154
4.3.3	Penggunaan VBA untuk metode newton .....	156
4.4	Interpolasi dengan Metode Lagrange .....	161
4.4.1	Persamaan interpolasi lagrangian orde satu (Linear).....	161
4.4.2	Persamaan interpolasi lagrangian orde dua .....	163
4.4.3	Persamaan interpolasi lagrangian orde tiga .....	164
4.5	Interpolasi Spline .....	166
4.5.1	Interpolasi spline linear .....	168
4.5.2	Interpolasi spline kuadrat.....	169
4.5.3	Interpolasi spline pangkat 3 ( <i>Cube Spline</i> ).....	176
BAB 5	REGRESI.....	187
5.1	Aplikasi Regresi untuk Permasalahan Teknik Sipil .....	187
5.2	Regresi Linear.....	189
5.3	Regresi Nonlinear dengan Model Eksponensial.....	196
5.4	Regresi Nonlinear dengan Model Fungsi Berpangkat.....	201
5.5	Regresi Polinomial.....	205
5.6	Regresi dengan Dua Variabel Bebas.....	211

BAB 6	INTEGRAL NUMERIK.....	216
6.1	Aplikasi Integral Numerik pada Permasalahan Teknik Sipil .....	216
6.2	Pengertian Integral .....	220
6.3	Metode Trapesium.....	221
6.4	Metode Simpson 1/3 .....	236
6.5	Metode Simpson 3/8 .....	246
6.6	Metode Gauss Quadratur .....	253
BAB 7	PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA.....	264
7.1	Persamaan Diferensial Biasa Aplikasi pada Teknik Sipil....	264
7.2	Metode Runge-Kutta Orde Satu .....	267
7.2.1	Metode Euler .....	268
7.2.2	Kesalahan pada Metode Euler .....	271
7.3	Metode Runge-Kutta Orde Dua .....	280
7.3.1	Metode Heun .....	281
7.3.2	Metode Titik Tengah.....	283
7.3.3	Metode Ralston.....	284
7.3.4	Aplikasi Runge-Kutta orde dua .....	285
7.4	Metode Runge-Kutta Orde Empat.....	297
7.5	Persamaan Diferensial Biasa Orde lebih dari Satu .....	301
7.5.1	Metode Euler untuk PDB orde dua .....	302
7.5.2	Metode Heun untuk PDB orde dua.....	304
BAB 8	PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL .....	307
8.1	Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial .....	307
8.2	PDP Ellips.....	308
8.3	PDP Parabolik.....	317
8.3.1	Skema eksplisit .....	317
8.3.2	Skema implisit .....	322
8.3.3	Skema Crank Nicolson .....	335
DAFTAR PUSTAKA	.....	342

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Metode Setengah Interval; Interval Hitungan antara 0–3 .....	27
Tabel 2.2	Metode Setengah Interval; Interval Hitungan antara 1–5 .....	27
Tabel 2.3	Hasil VBA pada Soal no 1 dengan Metode Setengah Interval, nilai awal 1 dan 5.....	30
Tabel 2.4	Hasil VBA pada Soal no 1 dengan Metode Setengah Interval, nilai awal 0 dan 2.....	31
Tabel 2.5	VBA pada Soal no 2 dengan Metode Setengah Interval, $x = 0-2$	33
Tabel 2.6	VBA pada Soal no 2, Metode Setengah Interval, $x = 6-8$ .....	34
Tabel 2.7	Penyelesaian Interpolasi Linear, dengan Microsoft Excel.....	37
Tabel 2.8	Penyelesaian dengan Interpolasi Linear, dengan VBA.....	40
Tabel 2.9	Hitungan Metode Newton Raphson.....	43
Tabel 2.10	Proses Iterasi dengan nilai awal berada di dekat nilai ekstrim fungsi $f(x)$ .....	45
Tabel 2.11	Proses Iterasi dengan nilai awal $x = 1,0$ .....	46
Tabel 2.12	Proses Iterasi dengan nilai awal $x = 1,1$ .....	47
Tabel 2.13	Proses Iterasi dengan nilai awal $x = 1,2$ .....	48
Tabel 2.14	Proses Iterasi Konvergen pada Metode Secant.....	54
Tabel 2.15	Proses Iterasi Divergen pada Metode Secant.....	54
Tabel 2.16	Contoh Proses Iterasi .....	56
Tabel 3.1	Kondisi Batas .....	71
Tabel 3.2	Hasil Iterasi Metode Gauss Seidel .....	123
Tabel 3.3	Hasil Iterasi Metode Jacobi .....	126
Tabel 3.4	Nilai-nilai parameter Metode Choleski.....	133
Tabel 3.5	Hitungan Parameter P dan Q pada Metode Choleski.....	134
Tabel 3.6	Hitungan Konsentrasi dengan Metode Choleski ( $n=1$ ).....	134
Tabel 3.7	Hitungan Konsentrasi dengan Metode Choleski ( $n=2$ ).....	135

Tabel 4.1	Data Hubungan Tegangan vs. Regangan.....	136
Tabel 4.2	Data Sedimentasi Waduk .....	138
Tabel 5.1	Data Tegangan-Regangan di Laboratorium .....	187
Tabel 5.2	Data Kedalaman–Debit Aliran.....	188
Tabel 5.3	Data Kedalaman–Debit Aliran.....	189
Tabel 5.4	Data Tegangan-Regangan di Laboratorium .....	194
Tabel 5.5	Hitungan Regresi Linear .....	195
Tabel 5.6	Data Tegangan-Regangan Tarik Baja.....	198
Tabel 5.7	Proses Hitungan Regresi Eksponensial .....	199
Tabel 5.8	roses Hitungan Regresi Eksponensial.....	203
Tabel 5.9	Perbandingan Nilai Koefisien Korelasi untuk 3 Fungsi Regresi	204
Tabel 5.10	Hitungan Elemen Matriks Regresi Kuadrat.....	208
Tabel 5.11	Hitungan Elemen Matriks Regresi Kuadrat.....	210
Tabel 5.12	Hitungan Elemen Matriks pada Regresi Bidang Linear.....	214
Tabel 6.1	Data Lebar Bangunan Bendung pada berbagai Kedalaman.....	219
Tabel 6.2	Hitungan Metode Trapesium.....	229
Tabel 6.3	Rekapitulasi Hasil Hitungan Numerik .....	232
Tabel 6.4	Hitungan Tegangan Tanah.....	234
Tabel 6.5	Hasil Hitungan Tegangan Tanah dengan alternatif ukuran pias	236
Tabel 6.6	Hitungan Kecepatan pada berbagai nilai $y$ .....	244
Tabel 6.7	Perbandingan Jumlah Pias Pada Metode Simpson 1/3 .....	245
Tabel 6.8	Hasil Hitungan Distribusi Kecepatan.....	252
Tabel 6.9	Hitungan Metode Simpson 3/8 dengan alternatif jumlah Pias.	253
Tabel 6.10	Faktor Pemberat pada Metode Gauss Quadratur .....	260
Tabel 6.11	Resume Hasil Hitungan dengan Variasi Jumlah Titik .....	263
Tabel 7.1	Hasil Hitungan dengan berbagai nilai $\Delta x$ .....	273
Tabel 7.2	Hasil Hitungan Parameter Tampungan.....	295
Tabel 7.3	Hasil Hitungan Penurunan Muka Air Tampungan dengan Metode Heun .....	297
Tabel 8.1	Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsiil .....	307
Tabel 8.2	Aplikasi Persamaan Deferensial Parsiil pada kondisi Fisik .....	308
Tabel 8.3	Output VBA untuk Hitungan 2 tahap waktu yang pertama .....	329

Tabel 8.4	Data Domain Hitungan dan Kondisi Batas .....	337
Tabel 8.5	Hitungan Metode Sapuan Ganda pada Skema Crank Nicolson	338
Tabel 8.6	Input Data Hitungan Skema Crank Nicolson untuk Konveksi-Difusi.....	340

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Penyelesaian Akar Persamaan .....	4
Gambar 1.2	Titik Potong Dua Persamaan Linear.....	5
Gambar 1.3	Luas Areal Integrasi .....	6
Gambar 2.1	Kurva Fungsi Kuadrat dengan Variasi Nilai ( $b^2-4ac$ ).....	12
Gambar 2.2	Skema Pembebanan pada Struktur Balok.....	13
Gambar 2.3	Skema Pembebanan pada Struktur Balok (2).....	14
Gambar 2.4	Skema Struktur Balok didukung Jepit-Rol.....	17
Gambar 2.5	Skema Tampang Lintang Saluran.....	18
Gambar 2.6	Skema Pembebanan pada Turap Baja.....	20
Gambar 2.7	Satu Akar Persamaan diantara $x_1$ dan $x_2$ .....	22
Gambar 2.8	Lebih dari Satu Akar Persamaan diantara $x_1$ dan $x_2$ .....	22
Gambar 2.9	Akar Persamaan di antara $x_1$ dan $x_2$ .....	23
Gambar 2.10	Tidak ada Akar Persamaan di antara $x_1$ dan $x_2$ .....	23
Gambar 2.11	Skema Hitungan Metode Setengah Interval .....	24
Gambar 2.12	Skema Langkah Hitungan Metode Setengah Interval.....	36
Gambar 2.13	Skema Penyusunan Metode Newton Raphson.....	41
Gambar 2.14	Proses iterasi Metode Newton Raphson.....	43
Gambar 2.15	Proses iterasi Metode Newton Raphson, nilai awal $x = 1,0$ . ..	47
Gambar 2.16	Proses iterasi Metode Newton Raphson, nilai awal $x = 1,1$ . ..	48
Gambar 2.17	Proses iterasi Metode Newton Raphson, nilai awal $x = 1,2$ . ..	49
Gambar 2.18	Skema Metode Secant .....	50
Gambar 3.1	Kesalahan Tiap Orde Deret Taylor untuk $\Delta x = 1$ dan $\Delta x = 2$ ..	62
Gambar 3.2	Diferensiasi Kontinu dan Diferensiasi Maju.....	63
Gambar 3.3	Diferensiasi Kontinu, Diferensiasi Maju, dan Diferensiasi Mundur.....	64



Gambar 3.4	Diferensiasi Kontinu, Diferensiasi Maju, Diferensiasi Mundur, dan Diferensiasi Terpusat .....	65
Gambar 3.5	Skema Penurunan Air Tanah akibat Pemompaan .....	69
Gambar 3.6	Skema Domain Hitungan.....	69
Gambar 3.7	Empat Titik Grid yang dicari nilainya.....	71
Gambar 3.8	Domain Hitungan Lendutan Plat.....	73
Gambar 3.9	Struktur Rangka .....	76
Gambar 3.10	Penggunaan Microsoft Excel Pada Hitungan Metode Cramer.....	82
Gambar 3.11	Tampilan Hitungan $u_{i,j}$ ; Metode Cramer dengan Microsoft Excel .....	84
Gambar 3.12	Tampilan Hitungan $z_{i,j}$ ; Metode Cramer dengan Microsoft Excel .....	86
Gambar 3.13	Domain Hitungan Lendutan Plat.....	97
Gambar 3.14	Perkalian Matriks dengan MMULT( ).....	120
Gambar 3.15	Hasil Hitungan dengan Metode Choleski.....	135
Gambar 4.1	Tegangan vs Regangan.....	137
Gambar 4.2	Tiga Lapisan Air pada Danau .....	137
Gambar 4.3	Data Temperatur Air pada Danau .....	138
Gambar 4.4	Interpolasi Linear dengan Dua Titik Data.....	140
Gambar 4.5	Interpolasi Kuadrat dengan Tiga Titik Data.....	142
Gambar 4.6	Dua Alternatif Penyelesaian Interpolasi Kuadrat.....	144
Gambar 4.7	Penyelesaian Interpolasi Polinomial Orde Tiga .....	147
Gambar 4.8	Interpolasi Linear Lagrange.....	162
Gambar 4.9	Hasil Kajian Interpolasi Kuadrat Lagrange.....	164
Gambar 4.10	Hasil Hitungan Interpolasi Lagrangian dengan Polinomial Orde 3 .....	166
Gambar 4.11	Fluktuasi Kurva Interpolasi.....	167
Gambar 4.12	Kurva Interpolasi Spline Linear.....	169
Gambar 4.13	Kurva Interpolasi Spline Kuadrat dan Polinomial Orde 5... ..	172
Gambar 4.14	Hasil Interpolasi Spline Pangkat 3 .....	186
Gambar 5.1	Skema Pembebanan Tarik Pada Batang Baja.....	187

Gambar 5.2	Data Kedalaman Aliran ( $h$ )-Debit ( $Q$ ) .....	188
Gambar 5.3	Skema Gerusan Lokal di Hilir Bangunan Bendung .....	189
Gambar 5.4	Dua penyelesaian regresi dari 4 titik data .....	190
Gambar 5.5	Tegangan-Regangan Batang Baja .....	194
Gambar 5.6	Hasil Analisis Regresi Linear .....	196
Gambar 5.7	Tampilan Titik-titik Data pada Sumbu Koordinat $\tau - \ln(\varepsilon)$ .....	198
Gambar 5.8	Fungsi Regresi Eksponensial dengan Koordinat $\tau - \ln(\varepsilon)$ ...	200
Gambar 5.9	Fungsi Regresi Eksponensial dengan Koordinat $\tau - \varepsilon$ .....	200
Gambar 5.10	Tampilan Titik-titik Data pada Sumbu Koordinat $\log(\tau) - \log(\varepsilon)$ .....	202
Gambar 5.11	Fungsi Regresi Berpangkat, Skala Logaritmik.....	204
Gambar 5.12	Fungsi Regresi Berpangkat, Eksponensial dan Linear .....	204
Gambar 5.13	Fungsi Regresi Polinomial Pangkat Dua dan Tiga.....	211
Gambar 6.1	Skema Kecepatan Rerata .....	217
Gambar 6.2	Skema Integrasi $F(h)$ .....	218
Gambar 6.3	Skema Tekanan Hidrostatik pada Bangunan Air .....	218
Gambar 6.4	Skema Pembebanan Merata pada Fondasi Pelat .....	219
Gambar 6.5	Luas Areal yang dipresentasikan dengan Integral Fungsi....	220
Gambar 6.6	Pembagian Luas Areal Integrasi Menjadi Pias-pias.....	221
Gambar 6.7	Luas Bidang Trapesium .....	224
Gambar 6.8	Kesalahan pada Penyelesaian Metode Trapesium.....	224
Gambar 6.9	Kesalahan pada Penyelesaian Metode Trapesium Satu Pias	225
Gambar 6.10	Kesalahan pada Penyelesaian Metode Trapesium Banyak Pias .....	225
Gambar 6.11	Representasi Kecepatan Rerata.....	227
Gambar 6.12	Skema Metode Trapesium dengan 5 Pias.....	229
Gambar 6.13	Luas Areal Hasil integrasi fungsi $f(x)$ dan $f_2(x)$ .....	237
Gambar 6.14	Penurunan Formulasi Metode Simpson 1/3.....	238
Gambar 6.15	Pendekatan Integral fungsi dengan Metode Simpson 1/3 ...	241
Gambar 6.16	Pendekatan Integral dengan Metode Simpson 1/3 Banyak Pias .....	243
Gambar 6.17	Fungsi $f(x)$ dan $f_3(x)$ .....	247

Gambar 6.18	Gabungan Pias dihitung dengan Metode Simpson 3/8 dan Trapesium .....	252
Gambar 6.19	Kesalahan Metode Trapesium .....	254
Gambar 6.20	Skema Metode Gauss Quadratur .....	254
Gambar 6.21	Transformasi Batas Integrasi.....	255
Gambar 7.1	Skema Defleksi pada Struktur Kantilever .....	265
Gambar 7.2	Skema Defleksi pada Struktur Balok dengan Sendi-Rol.....	265
Gambar 7.3	Skema Pengambilan Air dari Waduk.....	266
Gambar 7.4	Skema Aliran Air Tanah.....	267
Gambar 7.5	Skema Metode Runge-Kutta .....	267
Gambar 7.6	Penyelesaian Analisis untuk beberapa nilai C .....	269
Gambar 7.7	Penyelesaian Metode Euler dengan Analisis Variasi $\Delta x$ .....	271
Gambar 7.8	Skema Metode Heun.....	283
Gambar 7.9	Skema Metode Titik Tengah .....	284
Gambar 7.10	Skema Metode Ralston .....	285
Gambar 7.11	Skema Hitungan Metode Heun.....	287
Gambar 7.12	Skema Hitungan Metode Titik Tengah .....	289
Gambar 7.13	Skema Hitungan Metode Ralston .....	290
Gambar 7.14	Skema Penurunan Muka Air di Waduk .....	291
Gambar 7.15	Hasil Hitungan dengan Metode Euler.....	295
Gambar 7.16	Perbandingan Elev. Muka Air pada Metode Euler dan Heun.....	297
Gambar 7.17	Hasil Hitungan Runge-Kutta Keempat.....	301
Gambar 7.18	Skema Defleksi pada Struktur Kantilever .....	302
Gambar 7.19	Hasil Hitungan PDB Orde 2 dengan Metode Euler.....	304
Gambar 7.20	Hasil Hitungan PDB Orde 2 dengan Metode Heun dan Euler .....	306
Gambar 8.1	Domain Hitungan .....	310
Gambar 8.2	Domain Hitungan Lendutan Pelat.....	311
Gambar 8.3	Skema Diskretisasi Numerik Skema Eksplisit .....	318
Gambar 8.4	Skema Jaringan Titik Hitungan.....	318
Gambar 8.5	Hasil Hitungan dengan Skema Eksplisit, $\lambda = 0,375$ .....	321

Gambar 8.6	Hasil Hitungan dengan Skema Eksplisit, $\lambda = 0,5$ .....	321
Gambar 8.7	Hasil Hitungan dengan Skema Eksplisit, $\lambda = 0,55$ .....	321
Gambar 8.8	Skema Diskretisasi Numerik Skema Implisit .....	322
Gambar 8.9	Input Data untuk Hitungan Skema Implisit .....	329
Gambar 8.10	Hasil Hitungan untuk 2 tahap waktu yang pertama.....	330
Gambar 8.11	Input Data untuk Hitungan Skema Implisit .....	331
Gambar 8.12	Hasil Hitungan untuk 2 tahap waktu yang pertama.....	335
Gambar 8.13	Hasil Hitungan Konsentrasi dengan Crank Nicolson, $\lambda=0,9$ .....	339
Gambar 8.14	Hasil Hitungan Konsentrasi dengan Crank Nicolson, $\lambda= 4,5$ .....	339
Gambar 8.15	Hasil Hitungan untuk 5 tahap waktu yang pertama .....	341