

W I D O D O

GEOMETRI FRAKTAL



GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS

GEOMETRI FRAKTAL

Penulis:

Widodo

Editor:

Siti

Proofreader:

Nanan Susyanto

Desain sampul:

Pram's

Tata letak isi:

Rio

Penerbit:

Gajah Mada University Press
Anggota IKAPI dan APPTI

Ukuran: 15,5 × 23 cm; x + 186 hlm

ISBN: 978-602-386-974-9
2103078-B1E

Redaksi:

Jl. Sendok, Karanggayam CT VIII Caturtunggal
Depok, Sleman, D.I. Yogyakarta, 55281
Telp./Fax.: (0274) 561037
ugmpress.ugm.ac.id | gmupress@ugm.ac.id

Cetakan pertama: April 2021

3221.065.03.21

Hak penerbitan ©2021 Gajah Mada University Press

Dilarang mengutip dan memperbanyak tanpa izin tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apa pun, baik cetak, photoprint, microfilm, dan sebagainya.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum warahmatullaahi wabarakatuh

Penulis mengucapkan puji syukur ke hadirat Allah *subhanahu wa taala*, atas selesainya penulisan buku teks dengan judul *Geometri Fraktal*. Buku ini dapat digunakan sebagai salah satu referensi mata kuliah Pengantar Geometri Fraktal di tingkat sarjana (S-1) atau mata kuliah Geometri Fraktal, di tingkat magister (S-2) untuk Program Studi Matematika, Pendidikan Matematika, Statistika, Ilmu Komputer, Teknologi Informasi atau program studi lain yang relevan.

Agar dapat membaca buku ini dengan baik, diperlukan pengetahuan tentang fungsi, iterasi fungsi dengan domain himpunan bagian dari ruang Euclides R^n dan ruang metrik lengkap (X,d) , topologi pada ruang metrik, konvergensi, ekuivalensi ruang metrik, himpunan kompak, dan pemetaan kontraksi. Untuk menggambar fraktal sebaiknya pembaca juga mengenal minimal salah satu bahasa pemrograman seperti pemrograman Pascal, C++, MatLab, Wolfram Mathematica atau bahasa pemrograman lainnya.

Dalam buku ini dibicarakan secara detail tentang ruang fraktal, metrik Hausdorff, kelengkapan ruang fraktal, pemetaan kontraksi pada ruang fraktal, Sistem Fungsi Iterasi (SFI), atraktor, paradoks pada fraktal, dimensi fraktal, interpolasi fraktal, dan pemrograman fraktal. Setiap bab diawali dengan tujuan dan capaian pembelajaran dan diakhiri dengan soal-soal latihan. Di sini, geometri fraktal dikonstruksikan secara matematis untuk mempelajari himpunan yang tidak teratur (*irregular sets*) dari objek-objek seperti himpunan Cantor, himpunan Julia, himpunan Mandelbrot, segitiga Sierpinski, karpet Sierpinski, gambar daun pakis, batik, gunung, garis pantai, awan, *crop circles*, dan sebagainya. Geometri Euclides merupakan geometri tradisional yang hanya mampu mempresentasikan objek-objek teratur seperti garis, segitiga, segi empat, lingkaran, kubus, trapesium, layang-layang, dan

sebagainya. Ada beberapa hal penting yang bisa diungkap dengan geometri fraktal yang tidak ditemukan pada geometri Euclides, antara lain terungkap adanya:

- (a) Bangun geometri fraktal yang mempunyai keliling tak berhingga, tetapi luasnya nol, misalnya pada segitiga Sierpinski, merupakan paradoks fraktal, karena bertentangan dengan intuisi dan logika kita, yang selama ini lazim kita kenal dalam geometri Euclides.
- (b) Dimensi fraktal yang tidak bulat bahkan sering bilangan irrasional.
- (c) Interpolasi fraktal berbentuk fungsi kontinu, tetapi tidak diferensiabel di mana pun (*continuous function nowhere differentiable*).

Aplikasi geometri fraktal telah berkembang sangat pesat di berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi (IPTEK). Di bidang kedokteran, geometri fraktal digunakan untuk membuat diagnosis penyakit kanker paru-paru (*lung cancer*) dengan analisis fraktal pada kerusakan DNA, menggunakan dimensi fraktal citra retina sebagai prediktor kejadian stroke. Geometri fraktal juga digunakan pada potensi analisis fraktal gempa bumi melalui analisis *wavelet* dan penentuan nilai b sebagai gempa susulan prekursor. Di bidang nano teknologi, geometri fraktal dimanfaatkan pada aplikasi fraktal dalam *bio-nanosystems*, tentang analisis fraktal struktur pori mikro dan *nanosale* pada karbonat menggunakan intrusi merkuri tekanan tinggi. Terapan geometri fraktal di bidang rekayasa/teknik, antara lain penerapan fraktal dalam desain produk keramik, prinsip geometri fraktal dan aplikasi dalam arsitektur dan teknik sipil, simulasi fraktal, dan numerik jaringan fraktur selama penggalian penambangan batu bara. Tidak kalah penting, pengembangan fraktal geometri menggunakan konsep matematika sangat pesat, misalnya beberapa terdapat pada konstruksi umum fungsi interpolasi fraktal pada grid n , fungsi interpolasi fraktal dengan kemiripan diri parsial, kalkulus fraksional dari fungsi interpolasi fraktal pada $[0, b]$ ($b > 0$), kemulusan fungsi interpolasi fraktal pada \mathbb{R} dan lapangan lokal p -series, pendekatan baru untuk aproksimasi fraktal dari fungsi vektor, dan fraktal operator F -hutchinson umum dalam ruang metrik- b . Dalam buku ini difokuskan pada konsep fraktal dari sudut pandang matematika. Adapun terapan fraktal akan dibahas pada penulisan buku berikutnya.

Setelah membaca buku ini diharapkan pembaca dapat menyadari peranan analisis matematika, baik dalam bidang matematika maupun bidang lain yang terkait. Selain itu, juga diharapkan pembaca mampu menyintesis dan mengasah beragam pengetahuan prasyarat agar mempunyai *feeling* dan analogi untuk memahami geometri fraktal, baik dari aspek matematika maupun komputasi.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan berkarier sebagai dosen sejak tahun 1989 sampai sekarang. Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada Badan Penerbit dan Publikasi (BPP) UGM dan semua pihak yang telah membantu terbitnya buku ini.

Tentu buku ini belum sempurna, baik dilihat dari isi, teknik penyajian, kualitas, maupun *editing*-nya. Oleh karena itu, saran, kritik, dan komentar para pembaca sangat diharapkan untuk perbaikan di waktu yang akan datang. Semoga buku ini bermanfaat bagi semua pihak, terutama bagi pengembangan matematika untuk semua.

Wassalaamu'alaikum warahmatullaahi wabarakatuh.

Yogyakarta, 20 Juli 2020

Widodo

Daftar Isi

KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN DAN PENGERTIAN DASAR	1
1.1. Pendahuluan: Pengertian Matematika, Peran Matematika Dalam Perkembangan Iptek, Dan Gambaran Umum Geometri Fraktal.	3
1.1.1. Pengertian Matematika	3
1.1.2. Peran Matematika dalam Perkembangan IPTEK	7
1.1.3. Gambaran Umum Geometri Fraktal.....	11
1.1.4. Terapan Geometri Fraktal di Berbagai Bidang	14
1.2. Pengertian Dasar	16
1.2.1. Ruang Metrik	17
1.2.2. Topologi pada Ruang Metrik	18
1.2.3. Konvergensi Barisan di Ruang Metrik	21
1.2.4. Ekuivalensi Ruang Metrik	24
1.2.5. Himpunan Kompak.....	29
1.2.6. Transformasi pada Ruang Metrik	30
1.2.7. Fungsi Kontinu pada Ruang Metrik.....	34
1.2.8. Pemetaan Kontraksi	37
1.2.9. <i>Cantor's Nested Set Theorem</i>	43
1.2.10. Soal-Soal Latihan.....	44
BAB II RUANG FRAKTAL	49
2.1. Pengertian Ruang Fraktal dan Metrik Hausdorff	50
Metrik Hausdorff	58
2.2. Kelengkapan Ruang Fraktal	60

2.3. Pemetaan Kontraksi Pada Ruang Fraktal, Sistem Fungsi Iterasi (SFI), dan Attraktor	68
2.4. Paradoks (<i>Paradox</i>) pada Fraktal	90
2.5. Soal-Soal Latihan	94
BAB III DIMENSI FRAKTAL	99
3.1. Dimensi Hitung Kotak.....	101
3.2. Dimensi Fraktal Secara Teoretis.....	108
3.3. Dimensi Hausdorff-Besicovitch	110
3.4. Soal-Soal Latihan	113
BAB IV INTERPOLASI FRAKTAL	115
4.1. FUNGSI INTERPOLASI FRAKTAL DAN BUKTINYA	116
4.2. Dimensi Fraktal dari Fungsi Interpolasi Fraktal.....	130
4.3. Soal-Soal Latihan	135
BAB V PEMBUATAN PROGRAM FRAKTAL	137
5.1. Komputer dan Komputasi Matematika	138
5.2. Eksistensi Attraktor Sistem Fungsi Iterasi (SFI) dari Transformasi <i>Affine</i>	143
5.3. Algoritma Deterministik	148
5.4. Algoritma Iterasi Random	151
5.5. Soal-Soal Latihan	164
DAFTAR PUSTAKA	165
GLOSARIUM	174
TENTANG PENULIS	184